Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.
2. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. М.; Л., 1950.

V. S. Malakhovsky

Holonomic surfaces and line-congruences in three-dimensional projective space

In three-dimensional projective space P_3 surfaces and line-congruencies with zero values of diagonal components of derivation formulas of their canonical frames are investigated. Such manifolds are defined by completely entegrable Pfaffian systems of equations. Different geometrical characteristics of associated with these manifolds surfaces and line-congruencies are investigated.

УДК 514.75

В. С. Малаховский, Е. А. Щербак

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Об исследованиях на пустом множестве в дифференциальной геометрии

Дан анализ причин возникновения в дифференциальной геометрии теорий на пустом множестве. Показано, что использование относительно неинвариантных систем дифференциальных уравнений и дифференциальных неравенств, превращение символа Кронекера и его обобщений, не зависящих от преобразований фундаментальной группы, в геометрические объекты (тензоры и квазитензоры) порождает теории на пустом множестве.

Ключевые слова: тензор, квазитензор, многообразие, относительная инвариантность, геометрический объект, тождество, неголономный, символ Кронекера, обобщенный символ Кронекера.

Введение

Интенсивное развитие дифференциальной геометрии во второй половине XX в. на базе тензорного исчисления, методы внешних дифференциальных форм Картана, подвижного репера Г. Дарбу, продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева способствовало тому, что геометрический аспект проблемы отступал на второй план, а на первый план выдвинулись аналитические построения, позволяющие осуществлять все более абстрактные обобщения известных геометрических теорий и превращающие дифференциальную геометрию в своеобразную игру символов и индексов.

Не только математики смежных областей, но и сами дифференциальные геометры стали с трудом понимать творения своих коллег. Это привело к потере интереса к геометрии как к науке. Аппарат исследования стал заслонять предмет исследования [12, с. 7].

К сожалению, в конце XX и начале XXI в. некоторые геометры стали использовать современный аналитический аппарат без анализа инвариантности рассматриваемых систем дифференциальных уравнений и неравенств относительно изменения свободных (вторичных) групповых параметров, т. е. параметров, оставляющих неизменным образующий элемент исследуемого многообразия. Более того, вспомогательные символы Кронекера δ^I_J и его обобщения $\delta^i_J, \delta^\alpha_J, \delta^I_i, \delta^I_\alpha$ ($i, j, k = \overline{1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}$; $I, J, K = \overline{1, n}$), не зависящие от фундаментальной группы, стали называть тензорами, квазитензорами и оперировать с ними по правилам тензорного исчисления.

Так появились научные публикации, содержащие исследования многообразий, являющихся пустыми множествами, т. е. возникли теории на пустом множестве.

1. Исследование многообразий, задаваемых относительно неинвариантными системами уравнений Пфаффа

Определение 1.1. *Пусть* $\{\theta^a\}$ $\left(a,b,c=\overline{1,N}\right)$ *— система форм Пфаффа, зависящих от главных и вторичных параметров фундаментальной группы G. Система* $\{\theta^a\}$ *называется относительно инвариантной, если*

$$\delta\theta^a = \lambda_b^a \theta^b, \tag{1.1}$$

где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам.

Из (1.1) следует, что при произвольном изменении вторичных параметров относительно инвариантная система уравнений Пфаффа

$$\theta^a = 0 \tag{1.2}$$

преобразуется в эквивалентную ей систему

$$\tilde{\theta}^a = \theta^a + \delta\theta^a = \left(\delta_b^a + \lambda_b^a\right)\theta^b = 0\,. \tag{1.3}$$

Если же система форм $\{\theta^a\}$ относительно неинвариантна, то изменением только вторичных параметров система дифференциальных уравнений (1.2) превращается в систему неравенств, т. е. такая система дифференциальных уравнений не определяет никакого подмногообразия.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

1. Пусть S_2 — гладкая поверхность (A) в трехмерном евклидовом пространстве, отнесенная к реперу $\{A;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ первого порядка ($\vec{e}_3$ — орт нормали к поверхности). Уравнение поверхности —

$$\omega^3 = 0 \;\; (\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0). \tag{1.4}$$

Дифференциальное уравнение

$$\omega^2 = 0 \qquad (1.5)$$

не определяет линии на поверхности S_2, так как оно относительно неинвариантно:

$$\delta\omega^2 = -\pi_1^2\omega^1 \neq 0,$$

где $\pi_1^2 = \omega_1^2\Big|_{\omega^1=0,\ \omega^2=0}$.

Изменением только вторичного параметра (поворотом репера вокруг нормали $\vec{e}_3$) уравнение (1.5) превращается в неравенство

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + \delta\omega^2 = \omega^2 - \pi_1^2\omega^1 \Rightarrow \tilde{\omega}^2\Big|_{\omega^2=0} = -\pi_1^2\omega^1 \neq 0. \qquad (1.6)$$

2. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 линейчатый комплекс K — трехмерное многообразие прямых.

Располагая вершины A_1 и A_2 репера $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ на луче комплекса, запишем его уравнение в виде

$$\omega_2^0 = 0 \ \left(\omega_1^0 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \neq 0\right). \qquad (1.7)$$

Уравнение

$$\omega_2^3 = 0 \qquad (1.8)$$

не выделяет в комплексе K двумерного подмногообразия прямых — «неголономную конгруэнцию», так как оно относительно неинвариантно:

$$\delta\omega_2^3 = \left(\pi_2^2 - \pi_3^3\right)\ \omega_2^3 + \pi_2^1\ \omega_1^3. \qquad (1.9)$$

3. Пусть S_m — m-мерная гладкая поверхность в n-мерном аффинном пространстве A_n. В репере нулевого порядка $\{A; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ (A — текущая точка поверхности S_m) система пфаффовых уравнений поверхности S_m имеет вид

$$\omega^a = \lambda_i^a\omega^i\left(i, j, k = \overline{1, m};\ a, b, c = \overline{m+1, n}\right). \qquad (1.10)$$

Система $m - r$ пфаффовых уравнений

$$\omega^{\breve{i}} = a_{\hat{i}}^{\breve{i}}\omega^{\hat{i}}\ \left(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, r};\ \breve{i}, \breve{j}, \breve{k} = \overline{r+1, m}\right) \qquad (1.11)$$

не задает на поверхности S_m r-мерного подмногообразия, так как эта система относительно неинвариантна.

Действительно, записывая систему (1.11) в виде

$$\theta^{\breve{i}} \overset{def}{=} a^{\breve{i}}_{\hat{i}}\omega^{\hat{i}} - \omega^{\breve{i}} = 0, \tag{1.12}$$

находим

$$\delta\theta^{\breve{i}} = -\Omega^{\breve{i}}_{\breve{j}}(\delta)\theta^{\breve{j}} + \Omega^{\breve{i}}_{\hat{i}}(\delta)\omega^{\hat{i}}, \tag{1.13}$$

где $\Omega^{\breve{i}}_{\breve{j}} = a^{\breve{i}}_{\hat{i}}\pi^{\hat{i}}_{\breve{j}} + a^{\breve{i}}_{\hat{i}}\lambda^{a}_{\breve{j}}\pi^{\hat{i}}_{a} + \lambda^{a}_{\breve{j}}\pi^{\breve{i}}_{a}$;

$$\begin{aligned}\Omega^{\breve{i}}_{\hat{i}}(\delta) = {} & \delta a^{\breve{i}}_{\hat{i}} - a^{\breve{i}}_{\hat{j}}\pi^{\hat{j}}_{\hat{i}} + a^{\breve{j}}_{\hat{i}}\pi^{\breve{i}}_{\breve{j}} - a^{\breve{i}}_{\hat{j}}a^{\breve{j}}_{\hat{i}}\pi^{\hat{j}}_{\breve{j}} - \lambda^{a}_{\hat{i}}a^{\breve{i}}_{\hat{j}}\pi^{\hat{j}}_{a} + \\ & + a^{\breve{i}}_{\hat{j}}a^{\breve{j}}_{\hat{i}}\lambda^{a}_{\breve{j}} + \pi^{\breve{i}}_{\hat{i}} + \lambda^{a}_{\hat{i}}\pi^{\breve{i}}_{a} + \lambda^{a}_{\breve{j}}a^{\breve{j}}_{\hat{i}}\pi^{\breve{i}}_{a}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Примечание. Во второй половине прошлого века с использованием относительно неинвариантных систем уравнений Пфаффа было опубликовано в различных изданиях (включая труды Парижской АН) свыше двухсот научных работ. В 1968—1973 гг. возникли дискуссии по этому вопросу (Паланга, май 1968; Тбилиси, октябрь 1969; Томск, декабрь 1970; Москва, МГУ, апрель 1971) и появились научные публикации, отражающие противоположные точки зрения (например, [3; 17]). Итоги этих споров были подведены в мае 1973 г. в РЖМат ВИНИТИ АН СССР [18]. Было доказано, что эти исследования — теории на пустом множестве.

2. Исследования с использованием неголономных линейных дифференциальных групп $\tilde{D}^k_n$

При исследовании расслоений $H^p(M_n)$ реперов r^p_x порядка $(p \le n)$ на n-мерном дифференцируемом многообразии M_n $(x \in M_n)$ возникает последовательность линейных дифференциальных групп $D^1_n, D^2_n, \ldots, D^p_n$ порядков 1, 2,…, p, определяемых структурными формами

$$\omega_i^k, \left\{\ \omega_i^k, \omega_{ij}^k \right\}, \ldots, \left\{\ \omega_i^k, \omega_{ij}^k, \ldots, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}^k \right\}, \qquad (2.1)$$

где формы Пфаффа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_h}^k$ $\left(2 \le h \le p\right)$ симметричны по любой паре нижних индексов $\left(i_1, i_2, \ldots i_p = \overline{1,n}\right)$.

Во второй половине XX и в начале XXI в. некоторые геометры стали исследовать многообразия с дифференциальными линейными группами $\tilde{D}_n^k$ $\left(k = \overline{2,p}\right)$ с несимметричными по нижним индексам структурными формами $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ $\left(2 \le h \le p\right)$ [2].

При этом не учитывалось действие вторичных параметров на реперы r_x^k, т. е. параметров, изменяющихся свободно при фиксации точки $x \in M_n$.

Однако именно вторичные параметры позволяют [4; 5] свести дифференциальные неравенства

$$\omega_{ij}^k - \omega_{ji}^k \ne 0, \ldots, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_h}^k - \omega_{i_2 i_1 \ldots i_h} \ne 0,\ \ldots \qquad (2.2)$$

к дифференциальным тождествам

$$\omega_{ij}^k \equiv \omega_{ji}^k, \ldots, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_h}^k \equiv \omega_{i_2 i_1 \ldots i_h}^k,\ \ldots \qquad (2.3)$$

Следовательно, дифференцируемых многообразий с несимметричными нижними индексами структурных форм $\omega_{i_2 i_1 \ldots i_h}^k$, т. е. неголономных дифференцируемых многообразий, не существует, а построенные на их базе исследования являются теориями на пустом множестве [4; 5].

3. О полях геометрических объектов на дифференцируемом многообразии

При исследовании дифференцируемых многообразий M_n с различными фундаментальными группами важную роль играют поля геометрических объектов — совокупностей функций от локальных координат точки $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in M_n$, преобразующихся при переходе от совокупности $\left(x^{i}\right)$ локальных координат в одной локальной системе к совокупности $\left(x^{i'}\right)$ координат той же точки в другой локальной системе по определенным правилам, удовлетворяющим законам взаимности и транзитивности.

В качестве примера рассмотрим объект $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}\left(x^{1},x^{2},\ldots,x^{n}\right)$ аффинной связности, закон преобразования компонент которого имеет вид

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\quad\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\quad\Gamma_{ij}^{k}+\frac{\partial^{2}x^{k}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\quad\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\,. \tag{3.1}$$

Здесь мы воспользовались очень удобным способом, предложенным П. К. Рашевским [10]: обозначать новые координаты и новые компоненты геометрических объектов штрихованными индексами ($i,j,k=\overline{1,n};\ \ i',j',k'=\overline{1,n}$).

Закон преобразования компонент Γ_{ij}^{k} удовлетворяет законам взаимности и транзитивности:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\quad\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\quad\Gamma_{i'j'}^{k'}+\frac{\partial^{2}x^{k'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\quad\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\,, \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_{i''j''}^{k''}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\quad\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}}\quad\Gamma_{i'j'}^{k'}+\frac{\partial^{2}x^{k'}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}\quad\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}}=\\=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k}}\Gamma_{ij}^{k}+\frac{\partial^{2}x^{k}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k}}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Определение 3.1. *Дифференцируемое многообразие M_n, снабженное полем объекта аффинной связности $\left\{\,\Gamma_{ij}^{k}\right\}$, называется пространством аффинной связности и обозначается символом L_n.*

Мы ограничимся рассмотрением полей геометрических объектов на пространстве L_n.

Определение 3.2. *Тензором типа* (p,q), *или* p *раз ковариантным и* q *раз контравариантным, называется упорядоченная совокупность* n^{p+q} *функций* $t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\left(x^1, x^2, \dots, x^n\right)$, *занумерованных* p *нижними и* q *верхними индексами и преобразующихся по законам*

$$t^{j'_1 j'_2 \cdots j'_q}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \Gamma^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p},$$

$$t^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \Gamma^{j'_1 j'_2 \cdots j'_q}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}. \qquad (3.4)$$

Тензор типа (1,0) называется *ковариантным вектором*, тензор типа (0,1) — *контравариантным вектором*, тензор типа (1,1) — *аффинором*.

Из формулы (3.1) следует, что система функций

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \qquad (3.5)$$

является на L_n тензором типа (2,1), т. е. *тензором кручения пространства* L_n.

Если $S^k_{ij} \equiv 0$, то пространство аффинной связности L_n — *пространство аффинной связности без кручения, обозначающееся символом* L^0_n.

Система функций

$$R^e_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^e_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^e_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^e_{jp}\Gamma^p_{ik} - \Gamma^e_{ip}\Gamma^p_{jk} \qquad (3.6)$$

образует на L_n тензор типа (3,1), называемый *тензором кривизны пространства аффинной связности*.

Определение 3.3. *n-мерным римановым пространством называется дифференцируемое многообразие* M_n, *оснащенное полем дважды ковариантного, невырожденного, симметричного и положительно определенного тензора* $\{g_{ij}\}$ — *метрического тензора.*

Риманово пространство обозначается символом R_n. Оно является пространством аффинной связности без кручения, т. е. $R_n \subset L_n^0$.

Объект аффинной связности на R_n задается формулой

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ke} \left(\frac{\partial g_{ei}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ej}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^e} \right), \tag{3.7}$$

где g^{ij} — тензор, взаимный метрическому: $g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j$.

На римановом пространстве R_n определены поля *тензора кривизны*

$$R_{ij,ke} = R_{ij,k}^q g_{qe} \tag{3.8}$$

и *тензора Риччи*

$$R_{ij} = R_{ij,q}^q , \tag{3.9}$$

причем

$$R_{ij,ke} = R_{ke,ij};\ R_{ij,ke} = -R_{ji,ke};\ R_{ij} = R_{ji}. \tag{3.10}$$

Важно подчеркнуть, что тензор (как и любой геометрический объект) — это упорядоченная совокупность функций от координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ точки $x \in M_n$.

При исследовании дифференцируемых многообразий методом Г. Ф. Лаптева [1] продолжений и охватов пользуются обычно не конечными формулами преобразований компонент геометрического объекта, а вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений, выражающих дифференциалы компонент объекта линейными комбинациями структурных форм фундаментальной группы с коэффициентами — функциями координат данного объекта (при фиксации точки $x \in M_n$, т. е. при $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0, \ldots, \omega^n = 0$).

Например, тензор типа (p,q) задается при $\omega^1 = 0, \ldots, \omega^n = 0$ уравнениями

$$\Delta t^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \overset{def}{=} dt^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + t^{kj_2 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \omega^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1 \ldots j_{q-1} k}_{i_1 \ldots i_p} \omega^{j_q}_k - \\ - t^{j_1 \ldots j_q}_{k i_2 \ldots i_p} \omega^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{p-1} k} \omega^k_{i_p} = 0 \tag{3.11}$$

— линейными и однородными относительно своих компонент.

4. Символ Кронекера и его обобщения — идеальные инструменты для построения теорий на пустом множестве

Символ Кронекера

$$\delta^I_J = \begin{cases} 0, & если \;\; I \neq J \\ 1, & если \;\; I = J \end{cases} \tag{4.1}$$

широко используется как вспомогательный символ в различных областях математики, и прежде всего в дифференциальной геометрии. Это позволяет геометрам упрощать записи формул и дифференциальных уравнений. Очевидно, что любая формула или дифференциальное уравнение, изображенные с использованием символа Кронекера, могут быть подробно расписаны и без применения этого символа.

Несмотря на то что символ Кронекера снабжен двумя индексами — нижним и верхним, его нельзя назвать ни тензором типа (1,1), ни геометрическим объектом.

Действительно, символ Кронекера невозможно представить в виде $\delta^I_J = \delta^I_J\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ (см. определение 3.2), а значит, он не зависит от группы преобразований рассматриваемого пространства, следовательно, не удовлетворяет основной теореме теории геометрических объектов [1, с. 296].

Даже без учета ошибок, сделанных в работах [8; 9; 13—16] (эти ошибки изложены выше), формальное применение тензорных законов (3.4) и (3.11) к символу Кронекера дает соответственно

$$\delta^I_J = \frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J} \frac{\partial x^I}{\partial x^{I'}} \delta^{I'}_{J'} = \frac{\partial x^I}{\partial x^J} = \delta^I_J \,, \tag{4.2}$$

$$\Delta\delta_J^I \overset{def}{=} d\delta_J^I + \delta_J^K\omega_K^I - \delta_K^I\omega_J^K \equiv 0 + \omega_J^I - \omega_J^I \equiv 0 \ \left(I,J,K=\overline{1,n}\right),$$

т. е.

$$\Delta\delta_J^I \equiv 0. \tag{4.3}$$

Из выражений (4.2), (4.3) следует, что каждое из чисел, составляющих символ δ_J^I, не изменяется.

Данный факт не учтен в работах [8; 9; 13—16].

В конце прошлого и начале нынешнего века появился цикл научных публикаций [8; 9; 13—16], в которых использовались так называемые обобщенные символы Кронекера

$$\delta_J^i, \delta_J^\alpha, \delta_i^I, \delta_\alpha^I \left(i,j,k=\overline{1,m}; \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n}; I,J,K=\overline{1,n}\right), \tag{4.4}$$

где $1 \le m < n$.

Очевидно, что $\delta_i^\alpha \equiv 0, \delta_\alpha^i \equiv 0$, так как множества, пробегаемые индексами i и α, не пересекаются.

Используя нули, обозначаемые символами $\delta_i^\alpha, \delta_\alpha^i$, авторы этих публикаций стали строить обобщения известных результатов в дифференциальной геометрии и доказывать теоремы, не обращая внимания на то, что и обычные символы Кронекера δ_J^I, и обобщенные (4.4) не являются геометрическими объектами, а значит, к ним принципиально не применимы законы тензорного анализа.

Попытки коллег-геометров остановить процесс построения «новых» теорий на пустом множестве [6; 7; 11] полностью бездоказательно отвергались авторами этих публикаций. Опубликованные ими в 2011 г. работы [8; 9; 16] стали наглядной демонстрацией того, как обобщенные символы Кронекера (4.4) искусно используются авторами для создания из тождеств вида $0 \equiv 0$ новых теорий на пустом множестве.

Остановимся подробнее на основных выводах, сделанных авторами указанных работ, и на методах использования ими обобщенных символов Кронекера при получении этих выводов.

Основное внимание в работах [8; 9; 16] уделяется формулам

$$\begin{aligned} &\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha = 0,\ \Delta\delta^\alpha_J + \delta^i_J\omega^\alpha_i = 0, \\ &\Delta\delta^I_i - \delta^I_\alpha\omega^\alpha_i = 0,\ \Delta\delta^I_\alpha - \delta^I_i\omega^i_\alpha = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta\delta^i_J \overset{def}{=} d\delta^i_J + \delta^j_J\omega^i_j - \delta^i_K\omega^K_J;\ \Delta\delta^\alpha_J \overset{def}{=} d\delta^\alpha_J + \delta^\beta_J\omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_K\omega^K_J; \\ &\Delta\delta^I_i \overset{def}{=} d\delta^I_i + \delta^K_i\omega^I_K - \delta^I_j\omega^j_i;\ \Delta\delta^I_\alpha \overset{def}{=} d\delta^I_\alpha + \delta^K_\alpha\omega^I_K - \delta^I_\beta\omega^\beta_\alpha. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Авторы называют формулы (4.5) «дифференциальными уравнениями» или «уравнениями» [15, с. 155; 8, с. 114; 14, с. 157].

Докажем, что формулы (4.5) являются тождествами вида $0 \equiv 0$. Ограничимся доказательством первых двух формул (для двух других доказательство аналогично).

Теорема 4.1. *Формулы (4.5) являются тождествами вида* $0 \equiv 0$.

Доказательство:

1. $\Delta\delta^i_J \overset{def}{=} d\delta^i_J + \delta^j_J\omega^i_j - \delta^i_K\omega^K_J \equiv$

$$\equiv 0 + \left(\delta^j_J\omega^i_j + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha - \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha\right) - \left(\delta^i_j\omega^j_J + \delta^i_\alpha\omega^\alpha_J\right) \equiv$$

$$\equiv \delta^K_J\omega^i_K - \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha - \delta^i_j\omega^j_J \equiv \omega^i_J - \omega^i_J - \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha,$$

т. е.

$$\Delta\delta^i_J \equiv -\delta^\alpha_J\omega^i_\alpha \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в левую часть первой формулы (4.5), получим: $\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha \equiv -\delta^\alpha_J\omega^i_\alpha + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha \equiv 0$, т. е. первая формула (4.5) есть тождество вида $0 \equiv 0$.

2. $\Delta\delta^\alpha_J \overset{def}{=} d\delta^\alpha_J + \delta^\beta_J\omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_K\omega^K_J \equiv$

$$\equiv 0 + \left(\delta^\beta_J\omega^\alpha_\beta + \delta^i_J\omega^\alpha_i - \delta^i_J\omega^\alpha_i\right) - \left(\delta^\alpha_j\omega^j_J + \delta^\alpha_\beta\omega^\beta_J\right) \equiv$$

$$\equiv \delta^K_J\omega^\alpha_K - \delta^i_J\omega^\alpha_i - \delta^\alpha_\beta\omega^\beta_J \equiv \omega^\alpha_J - \omega^\alpha_J - \delta^i_J\omega^\alpha_i,$$

т. е.

$$\Delta\delta_J^\alpha = -\delta_J^i \omega_i^\alpha . \qquad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в левую часть второй формулы (4.5), получим

$$\Delta\delta_J^\alpha + \delta_J^i \omega_i^\alpha \equiv -\delta_J^i \omega_i^\alpha + \delta_J^i \omega_i^\alpha \equiv 0,$$

т. е. вторая формула (4.5) также является тождеством вида $0 \equiv 0$.

В работе [8, с. 114] сформулировано «Утверждение 1. В проективном пространстве P_n подсистемы Кронекера $\delta_J^i, \delta_J^\alpha$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.2), (1.3) (в нашей работе — это первые два тождества (4.5) вида $0 \equiv 0$. — *В. М., Е. Щ.*), т. е. являются квазитензорами, составляющими в совокупности тензор Кронекера δ_J^I ».

Так тождество вида $0 \equiv 0$ стало дифференциальным уравнением, а обобщенные символы Кронекера стали квазитензорами.

Обобщенные символы Кронекера (4.4) играют существенную роль в построении теорий на пустом множестве при формальной замене форм Пфаффа ω^i и ω^α на линейные комбинации форм ω^J. Делается это следующим образом: тождества

$$\omega^i \equiv \omega^i, \ \omega^\alpha \equiv \omega^\alpha \qquad (4.9)$$

записываются в виде

$$\omega^i \equiv \delta_K^i \omega^K ; \ \omega^\alpha \equiv \delta_K^\alpha \omega^K . \qquad (4.10)$$

Используя эти формулы, авторы работ осуществляют переход от сумм произведений

$$C_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j \ \text{и} \ C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \qquad (4.11)$$

(в которых множества, пробегаемые индексами i, j и α, β, γ, не пересекаются) к тождественно равным им суммам произведений

$$C_{ij}^\alpha \delta_I^i \delta_J^j \omega^I \wedge \omega^J ; \ C_{\beta\alpha}^\alpha \delta_I^\beta \delta_J^\gamma \omega^I \wedge \omega^J \qquad (4.12)$$

[16, с. 163, 169], что позволяет им в дальнейшем выносить формулы ω^J за знак внешнего умножения.

С формальной точки зрения кажется, что все гладко, а фактически при такой замене в первой сумме в принципе не могут появиться формы ω^α, а во второй — формы ω^i.

Действительно, авторы таких работ забыли, что $0 \cdot \omega^\alpha \equiv 0,\ 0 \cdot \omega^i \equiv 0$.

Имеем

$$\delta^i_K \omega^K = \delta^i_j \omega^j + \delta^i_\alpha \omega^\alpha = \omega^i + 0 \cdot \omega^{m+1} + \ldots + 0 \cdot \omega^n = \omega^i + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n-m\ раз};$$

$$\delta^\alpha_K \omega^K = \delta^\alpha_j \omega^j + \delta^\alpha_\beta \omega^\beta = \omega^\alpha + 0 \cdot \omega^1 + \ldots + 0 \cdot \omega^m =$$
$$= \omega^\alpha + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{m\ раз}.$$

Так что переход

$$C^\alpha_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \equiv C^\alpha_{ij} \delta^i_I \delta^j_J \omega^I \wedge \omega^J;\ C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \equiv C^\alpha_{\beta\gamma} \delta^\beta_I \delta^\gamma_J \omega^I \wedge \omega^J$$

на самом деле оставляет левую часть неизменной и не позволяет из нее вынести за знак внешнего умножения соответственно формы ω^α и ω^i.

Однако в работе [16, с. 163, 169] осуществлен такой переход и с его помощью доказан ряд лемм и теорем. В заключение проиллюстрируем доказательство леммы 4, приведенное в статье [16, с. 168—169].

В тождестве $\Delta\delta^\alpha_J + \delta^i_J \omega^\alpha_i \equiv 0$, т.е. в тождестве вида $0 \equiv 0$, преобразуется его левая часть:

$$0 \equiv 0 \leftrightarrow d\delta^\alpha_I - \delta^\alpha_K \omega^K_I + \delta^\beta_I \omega^\alpha_\beta + \delta^i_I \omega^\alpha_i \equiv 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow d\delta^\alpha_I - \delta^\alpha_K \omega^K_I + \delta^\beta_I \left(\theta^\alpha_\beta + C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma + \vartheta^\alpha_\beta\right) + \delta^i_I \omega^\alpha_i \equiv 0 \leftrightarrow$$

(здесь $\omega^\alpha_i = \theta^\alpha_i$; $\omega^\alpha_\beta = \theta^\alpha_\beta + C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma + \vartheta^\alpha_\beta$; $\vartheta^\alpha_\beta = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma, \omega^\alpha = \theta^\alpha$)

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow \Delta\delta^\alpha_I + \delta^\beta_I \theta^\alpha_\beta + \delta^\beta_I C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma + \delta^i_I \omega^\alpha_i \equiv 0 \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \Delta\delta^\alpha_I + \delta^J_I \theta^\alpha_J \equiv -C^\alpha_{\beta\gamma}\delta^\beta_I \theta^\gamma \leftrightarrow \Delta\delta^\alpha_I + \theta^\alpha_I \equiv \delta^\alpha_{I,J}\omega^J, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$$\delta^{\alpha}_{I,J} = -C^{\alpha}_{\beta\gamma}\delta^{\beta}_{I}\delta^{\gamma}_{J}\,, \tag{4.14}$$

т. е. выполнена замена

$$\theta^{\gamma} \equiv \delta^{\gamma}_{J}\theta^{J} \equiv \delta^{\gamma}_{J}\omega^{J} \equiv \delta^{\gamma}_{\alpha}\omega^{\alpha} + \delta^{\gamma}_{i}\omega^{i} \equiv$$
$$\equiv \omega^{\gamma} + 0\cdot\omega^{1} + \ldots + 0\cdot\omega^{m} = \omega^{\gamma} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{m\ раз}.$$

А где же ω^{i}? Получив из тождества вида $0 \equiv 0$ формулу (4.13), которая, как следует из приведенного доказательства, является таким же тождеством вида $0 \equiv 0$, сформулирована лемма 4 [16, с. 169]: «Компоненты обобщенного символа Кронекера δ^{α}_{I} удовлетворяют дифференциальным уравнениям (40.1) (в нашей работе — тождествам (4.13). — *В. М., Е. Щ.*), т. е. δ^{α}_{I} является квазитензором, присоединенным к главному полуприклеенному расслоению $G_{r+|m|}\left(B_{m+n}\right)$, причем его поле по базе B_{m+n} характеризуется постоянными пфаффовыми производными $\delta^{\alpha}_{I,J}$ (40.2) (у нас (4.14). — *В. М., Е. Щ.*), которые антисимметричны по нижним индексам».

Таким образом, мы показали, как манипулирование с обобщенными символами Кронекера позволяет, исходя из тождеств вида $0 \equiv 0$, получать формально правильными вычислениями тождества и формулы, использование которых порождают теории, построенные на пустом множестве. Обобщенные символы Кронекера $\delta^{i}_{J}, \delta^{\alpha}_{J}, \delta^{I}_{i}, \delta^{I}_{\alpha}$ действительно выступают идеальным инструментом для создания таких теорий.

Вывод. Для осуществления в дифференциальной геометрии корректных исследований, не приводящих к теориям на пустом множестве, необходимо учитывать роль вторичных параметров (групповых параметров, остающихся свободными при фиксации образующего элемента исследуемого многообразия), которые не влияют на многообразие, но могут преобразовывать пфаффовы формы, зависящие как от главных, так и от вторичных параметров. Поэтому допускается исследование только относительно инвариантных систем пфаффовых уравнений. Нельзя рассматривать дифференциальные неравенства, которые изменением только вторичных параметров превращаются в тождества или дифференциальные уравнения.

Символы Кронекера можно использовать только как вспомогательные символы, позволяющие упрощать запись формул и дифференциальных уравнений, но ни в коем случае ни как тензоры или квазитензоры, так как таковыми они не являются, даже если их обобщать. Они не зависят от фундаментальной группы исследуемого многообразия и, следовательно, не могут быть геометрическими объектами (см. [1, с. 296]).

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Лумисте Ю. Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69. С. 434—469.

3. *Малаховский В. С.* К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Известия высш. учеб. заведений. Математика. 1972. №9 (124). С. 54—65.

4. *Малаховский В. С.* О голономности расслоения реперов на дифференцируемом многообразии // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 69—78.

5. *Malakhovsky V. S.* About some restrictions of application of Cartan's method of exterior forms and the method of the moving frame in differential geometry // Избранные вопросы современной математики. Калининград, 2005. С. 31—33.

6. *Малаховский В. С.* Об особенностях применения ковариантного дифференцирования к обобщенным символам Кронекера // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 85—87.

7. *Малаховский В.С.* О принципиальных ошибках использования обобщенных символов Кронекера в дифференциальной геометрии // Там же. Вып. 42. С. 106—111.

8. *Петешов К.В.* Действие тензорного дифференциального оператора на подобъектах // Там же. Вып. 42. С. 111—116.

9. *Полякова К.В.* Применение обобщенных символов Кронекера к теории поверхностей // Там же. Вып. 42. С. 117—121.

10. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1953. С. 636.

11. *Столяров А.В.* Замечания к применению в научных исследованиях обобщенных символов Кронекера // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 144—145.

12. *Фиников С.П.* Теория поверхностей. М.; Л., 1934. С. 205.

13. *Шевченко Ю.И.* Нормальная связность Столярова, ассоциированная с распределением поверхностей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 157—166.

14. *Шевченко Ю.И.* Плоскостная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением // Там же. Вып. 40. С. 152—160.

15. *Шевченко Ю.И.* Проективная связность Лаптева — Остеану, ассоциированная с распределением плоскостей // Там же. Вып. 41. С. 159—165.

16. *Шевченко Ю.И.* Обобщенная связность Картана // Там же. Вып. 42. С. 159—172.

17. *Щербаков Р.Н., Слухаев В.В.* Репераж и расслоения // Тр. Томск. ун-та. 1972. № 212. С. 5—9.

18. *Щербаков Р.Н., Слухаев В.В.* Репераж и расслоения // РЖМат ВИНИТИ АН СССР. № 5, 13А, 5А 654. С. 88.

V. Malakhovsky, E. Shcherbak

About reseaches on empty set in differential geometry

It is shown that theories on empty set may appear if during reseach relativaly noninvariant systems of Pfaffian equations or uniqualities were used and Kronecker symbols (ordinary δ_J^K or generalized $\delta_J^i, \delta_J^\alpha, \delta_i^I, \delta_\alpha^I$, $i, j, k = \overline{1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}$; $I, J,\ K = \overline{1, n}$) not as system of scalars, but as geometrical objects are considered.